

# MODELO REDUCIDO DE LA SIMULACIÓN DNS DE UN ESCURRIMIENTO ALREDEDOR DE UN CILINDRO QUE ROTA A BAJOS RE

Ada Cammilleri, Juan D'Adamo

e-mail: cada@fi.uba.ar

e-mail: jdadamo@fi.uba.ar

Alejandro Gronsksis y Guillermo Artana

e-mail: aleg@fi.uba.ar

e-mail: gartana@fi.uba.ar

Departamento de Fluidodinámica Facultad de Ingeniería.

Universidad de Buenos Aires.

CP 1063 Avda. Paseo Colón 850. Buenos Aires. Argentina.

**Palabras claves:** Turbulencia. Flujo alrededor de un cilindro. Modelos reducidos. DNS. Descomposición en valores singulares. Proyección de Galerkin.

**Resumen.** *Presentamos la aplicación de la técnica POD-Galerkin para la obtención de un modelo reducido que describa la dinámica del flujo que contornea un cilindro circular a un  $Re=200$ . El modelo obtenido puede ser considerado para diseñar un sistema de control en el cual la acción del control esté dada por la rotación del cilindro. Se presentan resultados usando el método de la función de control aplicado al modelo reducido que surge de truncar la descomposición en los 2 primeros modos.*

## 1 Técnica POD-Galerkin

En el contexto de un escurrimiento complejo como lo es un flujo turbulento se pueden identificar *estructuras coherentes* que permiten describir su dinámica esencial. Consideramos la idea básica tratada por Lumley<sup>[1]</sup> donde la descomposición ortogonal de las correlaciones espaciales de la velocidad sirve como un método racional y cuantitativo de reconocimiento de estructuras coherentes.

La descomposición ortogonal de la matriz de covarianza de un conjunto de datos es un procedimiento clásico conocido como *descomposición de Karhunen-Loeve* o análisis de componentes principales. Lumley se refiere a ella como *Proper Orthogonal Decomposition* (POD).

Entre las ventajas relacionadas a la técnica POD se señala que es objetiva, metódica y ri-

gurosa, que es un procedimiento lineal que no requiere que el proceso bajo estudio lo sea, y es eficiente en cuanto provee la mejor descomposición en términos de energía. Además es un complemento interesante a la teoría de sistemas dinámicos en el sentido que permite proporcionar sistemas de orden reducido.

Consideramos un conjunto de datos representados como una función del espacio y del tiempo. En el espacio  $(L^2(\Omega))^2$  donde  $\Omega$  es un conjunto acotado de  $R^2$ , y con el producto interno definido por  $(a, b) = \int_{\Omega} a_1 b_1 + a_2 b_2 \, dx$ , la POD determina una base de funciones ortonormales que dependen del espacio y que permiten expresar los datos en forma óptima. Más precisamente, si  $\vec{u}(x, t)$  es una función del espacio y del tiempo, las funciones ortonormales  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  son tales que la proyección sobre las primeras  $n$  funciones  $\tilde{\vec{u}}(x, t) =$

$\sum_{j=1}^n a_j(t)\phi_j(x)$  minimiza el promedio temporal  $E(\|u - w\|_2^2), \forall w$ .

Las funciones  $\phi_j$  se calculan resolviendo la ecuación integral  $\int K(x, y)\phi(y)dy = \lambda\phi(x)$ , donde el núcleo  $K(x, y) = E(u(x, t)u(y, t))$ . En la práctica los datos son discretizados en tiempo y espacio con lo cual la ecuación integral se reduce a un problema estándar de autovalores. Como es usual en el estudio de turbulencia, descomponemos al campo de velocidades de un escurrimiento en un valor medio al que se superponen fluctuaciones, es decir  $\vec{u} = \vec{u}_m + \vec{u}'$ , siendo

$$\vec{u}_m(x) = E(\vec{u}(x, t)) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{u}(x, t) dt$$

donde, para  $M$  suficientemente grande,  $E(\vec{u}'(x, t)) = 0$ .

Definiendo  $\mathbf{u}$  como la matriz tal que  $u_i^j = \vec{u}'(x_i, t_j)$  los modos de POD son los vectores singulares a derecha  $\phi^{(i)}$  calculados a partir de una Descomposición en valores singulares (DVS) de  $\mathbf{u}$ , suponiendo que la grilla es uniforme.

Para tener una descripción completa de la evolución temporal de un escurrimiento, se recurre a las ecuaciones de conservación de la masa o de *continuidad* y a la de la conservación de cantidad de movimiento ( $\rho\vec{u}$ ) conocida como de Navier Stokes, donde  $\rho$  la densidad del fluido. En flujos con fuerzas volumétricas despreciables frente al resto de las magnitudes, estas ecuaciones pueden resumirse en:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \vec{u} \cdot \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2)$$

Una forma de estudiar los flujos turbulentos, es el desarrollo de modelos reducidos de la ecuación de Navier Stokes. Para conseguir un modelo reducido, una manera consiste en efectuar una proyección de Galerkin de la ecuación sobre una base finita de funciones ortogonales. La base sobre la cual se realiza la proyección no es otra que la calculada anteriormente como los autovectores del problema de descomposición en valores singulares de  $\mathbf{u}$ . La proyección de Galerkin permite reducir el sistema de

EDP a un sistema reducido de EDO. Esta reducción es crucial en el sentido que permite un detallado análisis de estabilidad y bifurcación. (Este análisis es prácticamente imposible por el tamaño del sistema por otros procedimientos). En busca de un modelo simplificado del escurrimiento, se trunca en  $s$  autovectores o *modos* y se considera la descomposición

$$u^{(k)} = \sum_{i=1}^M \langle u^{(k)}, \phi^{(i)} \rangle \cdot \phi^{(i)} \quad (3)$$

siendo  $a_i^{(k)} = \langle u^{(k)}, \phi^{(i)} \rangle$  con  $i = 1 \dots M$  donde  $\langle, \rangle$  indica producto interno canónico en  $\mathbb{R}^N$ . Luego el escurrimiento total:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{u}_m + \sum_{i=1}^s a_i^{(k)} \vec{\phi}^{(i)} + \gamma(k)\phi_c \quad (4)$$

donde  $\phi_c$  es una función de divergencia nula que verifica condiciones sobre el contorno del cilindro y  $\gamma$  indica la velocidad tangencial del cilindro en la interfase con el fluido<sup>[3]</sup>.

La aplicación de la técnica POD-Galerkin conduce a la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuadráticas de expresión:

$$\begin{aligned} \frac{da^i}{dt} = & D_i + \sum_{j=1}^s L_{ij}a^j + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s Q_{ijk}a^j a^k + \\ & E_i\gamma + \sum_{j=1}^s F_{ij}a^j\gamma + G_i\gamma^2 + C_i\frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

## 2 Aplicación

Presentamos una aplicación con datos sobre el flujo alrededor de un cilindro a  $Re=200$  que rota. Los datos son campos de velocidades que provienen de una simulación numérica DNS, Direct Numeric Simulation<sup>[4]</sup>. Las configuraciones estudiadas contemplan el caso del cilindro sin rotación y con una rotación a velocidad constante  $\gamma(t) = 0,1U_\infty$ . Se trabaja sobre un dominio de  $L_x = 11m$  y  $L_y = 12m$  con una resolución de malla de  $685 \times 433$ . El paso de tiempo de resolución fue de  $0,012s$ . Para obtener el modelo reducido, se trabajó con una malla

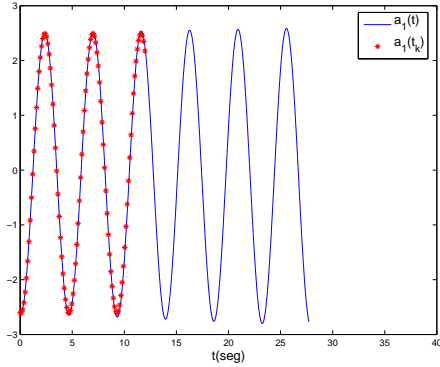


Figura 1: Solución del sistema

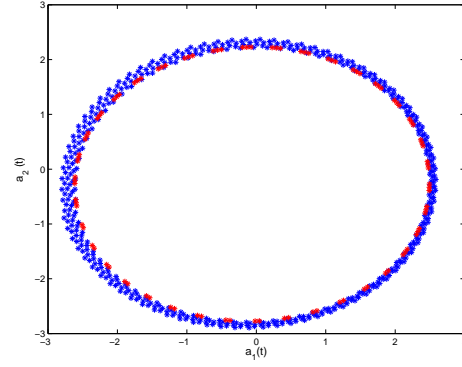


Figura 2: Diagrama de fase

de  $73 \times 115$  y con un paso temporal de  $0,12s$  que permitió contar con 600 observaciones. La función  $\phi_c$  surge de la diferencia entre las medias del campo de velocidades del caso sin rotación respecto del caso rotado. De la aplicación del método al conjunto de medidas correspondientes, surge en primer lugar el escurrimiento promedio y la distribución de autovalores en función de los sucesivos modos que muestra que en los primeros 2 modos se concentra la mayor parte de la energía cinética fluctuante del flujo. En consecuencia, con unas pocas variables puede describirse el sistema dinámico. La solución de (5) tomando como condición inicial un valor de  $a_i$  en un instante cualquiera se muestra en la Figura 1. En ella se ve la evolución de  $a_i(t)$  con respecto a los puntos datos, es decir con los  $a_i(t_k)$ . La Figura 1 muestra el comportamiento periódico asociado a las grandes estructuras del escurrimiento, descritas por el primer modo. A continuación, en la Figura 2 se muestra el diagrama de fase, donde se muestra el coeficiente temporal del primer modo en relación al coeficiente temporal del segundo. Se observa el comportamiento cíclico del sistema, que se comporta como un ciclo límite.

Hemos observado que frente a pequeñas variaciones del parámetro de control  $\gamma(t)$  el sistema se mantiene estable en tanto que frente a variaciones más importantes lo es sólo en el corto plazo. Esto permite prever que el modelo es capaz de simular situaciones diferentes a las producidas por los datos originales de la simulación

DNS.

## Conclusiones

El modelo reducido obtenido permite una reconstrucción satisfactoria del flujo alrededor de un cilindro que rota con una velocidad angular moderada para bajos  $Re$ . Ante una acción de control, es posible la predicción del estado del sistema. Asimismo, es posible plantear estrategias de control en las que  $\gamma(t)$  puede variar alrededor del valor original de los datos. Con ello logramos un modelo que puede ser útil en aplicaciones de control de escurrimientos y optimización.

## Referencias

1. Lumley, J. "The structure of inhomogeneous turbulence", Atmospheric turbulence and radio wave propagation, 1967.
2. Rajaei, M., Karlson, S., Sirovich, L. "Low-dimensional description of free shear flow coherent structures and their dynamical behaviour", Journal of Fluid Mechanics, vol. 258, 1994.
3. Tang, K, Graham, W., Peraire, J., Active Flow Control using Reduced Order Model and Optimum Control, AIAA 1996.
4. Lamballais E, Silvestrini J, Código Computacional INCOMPACT3D